## Präsenzübungen zur Vorlesung

# Mathematik für Naturwissenschaften II

### Blatt 8

**Aufgabe 1**

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Elementarmatrizen

$$Q_k(c) = \begin{array}{@{}c@{}l} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& 0 \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& c &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ 0 &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$P_{k\ell} = \begin{array}{@{}c@{}l} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 && \cdots && 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && \cdots && 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ell\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$R_{kl}(c) = \begin{array}{@{}c@{}l} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && c && \\ &&& \ddots &&& \\ && 0 && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \ell\text{-te Spalte} & \end{array}$$

(b) Begründen Sie, warum $\det(Q_k(c)A) = c\det(A)$, $\det(P_{k\ell}A) = -\det(A)$ und $\det(R_{kl}(c)A) = \det(A)$ gilt.

**Aufgabe 2**

(a) Berechnen Sie folgende Produkte in $S_6$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die inversen Permutationen zu den Produkten an.
Führen Sie dieselbe Rechnung auch in Zyklenschreibweise durch.

(b) Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe $S_n$ für $n \geq 3$ *nicht* kommutativ ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente der symmetrischen Gruppe $S_n$ gleich $n!$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass jede Permutation $\pi \in S_n$ als Produkt von Transpositionen geschrieben werden kann.

**Aufgabe 3**

Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie, dass für einen Skalar $\lambda \in K$ gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$