

Präsenzübungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 14

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\iint_{[-1,1] \times [0,2]} xye^{y^2} d(x, y)$

(b) $\int_P x + y d(x, y)$ mit $P = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 1 - y \leq x \leq 2 - y\}$

(c) $\int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \cos(x) \cos(y) \cos(z) d(x, y, z)$

(d) $\int_D \sqrt{2 + x^2} d(x, y)$ mit $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{2 + x^2}, 0 \leq x \leq 2\}$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

(a) das Volumenelement in Zylinderkoordinaten durch $dx dy dz = r dr d\varphi dz$ gegeben ist.

(b) das Volumenelement in Kugelkoordinaten (wie in der Vorlesung definiert, nicht wie im Leitfaden) durch $dx dy dz = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$ gegeben ist.

Aufgabe 3

Berechnen Sie das (dreidimensionale) Volumen der von der x - y -Ebene und dem Paraboloid $\{z = 4 - x^2 - y^2\}$ eingeschlossenen Menge.

Hinweis. Machen Sie sich zunächst eine Skizze, charakterisieren Sie das zu berechnende Volumen, und verwenden Sie dann geeignete Koordinaten.

Aufgabe 4

Sei $B_R(0) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Berechnen Sie

$$\iiint_{B_R(0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z).$$

Hinweis. Wählen Sie geeignete Koordinaten.