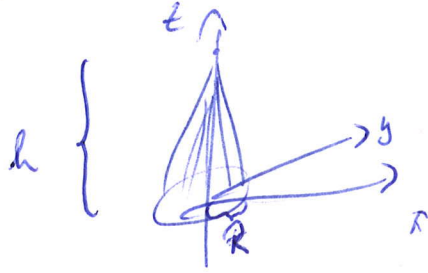


Kegelvolumen

Aufgabe:

Berechne das Volumen des Kegels K



mit Radius R und Höhe h , also das Integral

$$\int_K 1 \, d(x, y, z).$$

Im Zylinderkoordinaten wird K parametrisiert

durch

$$\varphi^{-1}(K) = \left\{ (r, \alpha, z) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h \left(1 - \frac{r}{R}\right) \right\}.$$

wie man z.B. durch Anwendung der Strahlensätze sieht. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_K 1 \, d(x, y, z) & \stackrel{\text{Transf.-Formel}}{=} \int_{\varphi^{-1}(K)} 1 \, r \, d(r, \alpha, z) \\ & = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{h(1-\frac{r}{R})} r \, dz \right) d\alpha \right) dr \end{aligned}$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r h \left(1 - \frac{r}{R} \right) dz \right) dr$$

$$= \int_0^R 2\pi r h \left(1 - \frac{r}{R} \right) dr$$

$$= \int_0^R 2\pi r h - \frac{2\pi r^2 h}{R} dr$$

$$= \left. \pi r^2 h - \frac{2\pi r^3 h}{3R} \right|_0^R$$

$$= \pi R^2 h - \frac{2\pi R^3 h}{3R}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi R^2 h}}$$