Lösungsskizzen

Blatt 14

A1:

$$V = \pi r^2 h$$
$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Minimiere $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ unter der

Nebenbedingung $F(r,h) = \pi r^2 h - V = 0$

Lagrange (o.E. $(r,h) \neq (0,0)$)

$\Longrightarrow$

$$\text{I} \quad 4\pi r + 2\pi h = \lambda\, 2\pi r h$$
$$\text{II} \quad 2\pi r = \lambda\, \pi r^2$$

$$\overset{\text{I}}{\Longrightarrow} \lambda = \frac{2}{r} \overset{\text{II}}{\Longrightarrow} \dots \Longrightarrow 2r = h, \text{ also}$$

„Durchmesser Kreis = Höhe"

A2: a)

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]} (x+y)^3 \, d(x,y)$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (x+y)^3 \, dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}(x+y)^4 \Big|_{-1}^{1} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(x+1)^4 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \, dx = \frac{1}{20}(x+1)^5 - \frac{1}{20}(x-1)^5 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \dots = 0$$

b) $$\int_{B_1(0)} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d(x,y)$$

$$\overset{\text{Transf.-Formel Polarkoord.}}{=} \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{\sin(\pi r)}{r} \cdot r \; d(r,\alpha)$$

$$\overset{\text{Satz}}{=} \left(\int_0^1 \sin(\pi r)\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\alpha\right)$$

$$= \dots = 4$$

Blatt 15

A1: a) Die Spalten von A bilden offenbar eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bzgl. des kanonischen Skalarprodukts, also

$$A \in O(3),\ U(3).$$

Es gilt

$$e_1 \xmapsto{A\cdot -} e_3$$
$$e_2 \xmapsto{A\cdot -} e_2$$
$$e_3 \xmapsto{A\cdot -} -e_1 \quad , \text{ also}$$

ist die Abbildung A eine Drehung um die y-Achse mit Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$.

b) Es gilt

$$\chi_A(\xi) = \det \begin{pmatrix} -\xi & 0 & -1 \\ 0 & 1-\xi & 0 \\ 1 & 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

$$= \xi^2(1-\xi) + (1-\xi)$$

$$= (\xi^2+1)(1-\xi)$$

zerfällt über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren!!

$$= (1-\xi)(i-\xi)(-i-\xi)$$

$\Rightarrow$ 3 verschiedene EWe $1, i, -i$

Die Eigenräume sind also eindimensional. Das macht das Orthonormalisieren besonders einfach!!!

Man zeigt (rechnet)

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bereits normiert!

$$\mathrm{Eig}(A,i) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -i & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ -i & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \underset{\text{normieren}}{=} \mathbb{C}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(A,-i) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \underset{\text{normieren}}{=} \mathbb{C}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

c)

b) $\Longrightarrow$ $\bar{S}^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, wobei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in U(3)$$

d) Nein, da A über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar ist (s.o.: χ_A zerfällt nicht über $\mathbb{R}$).

A2: Man zeigt (rechnet), z.B. durch Entwicklung nach der ersten Spalte, dass

$$\chi_A(\xi) = \det\begin{pmatrix} 2-\xi & -1 & 1 \\ -1 & 2-\xi & 1 \\ 1 & 1 & 2-\xi \end{pmatrix} = \ldots =$$

$$= -\xi^3 + 6\xi^2 - 9\xi$$

$$= -\xi(\xi^2 - 6\xi + 9)$$

$\overset{\text{p-q-Formel}}{\Longrightarrow}$ Eigenwerte $0, 3$, genauer gilt

$\chi_A(\xi) = -\xi(\xi-3)^2$, die algebr. Vielfachheit van 3 ist also zwei.

$$\mathrm{Eig}(A,0) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\text{normieren}}{=} \mathbb{R}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(A,3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ldots =$$

$$= \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1} \oplus \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2}$$

$= \ldots$ orthonormalisieren (G.-S.) $=$

$$= \underbrace{\mathbb{R}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=b_1} \oplus \mathbb{R}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

tut's!