

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 3

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ bezüglich der Funktion $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

ein metrischer Raum ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ auf dem \mathbb{R}^2 tatsächlich eine Normfunktion ist.

Hinweis. Verwenden Sie für die Dreiecksungleichung die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen im \mathbb{R}^d mit Limites a bzw. b . Weiter sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln und geben Sie jeweils ein Beispiel in Dimension $d = 2$ an.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^T \cdot b_n) = a^T \cdot b$.

Hinweis. Verwenden Sie Satz 70 aus der Vorlesung.

(3+3+3 Punkte)

Aufgabe 4

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass für eine bzgl. $\|\cdot\|$ konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\|.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Ungleichung aus Aufgabe 3 auf Präsenzübungsblatt 2.

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 06.05.2014, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128