

## Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaften II

### Blatt 4

#### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der  $d$ -dimensionale Einheitswürfel

$$[0, 1]^d := \{(x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq d\}$$

kompakt ist.

(4 Punkte)

#### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die durch die folgenden Abbildungsvorschriften definierten Funktionen stetig sind.

(a)  $(x, y)^T \mapsto (x^3, x - y, \sqrt{1 + x^2})^T$ .

(b)  $(x, y, z)^T \mapsto x + y - z$ .

(c)  $x \mapsto (\sin(x), -\cos(x), x)^T$ .

(d)  $(x, y)^T \mapsto \max(|x|, |y|)$ .

*Hinweis.* Teil (d): Beachten Sie, dass gilt  $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ .

(2+2+2+2 Punkte)

#### Aufgabe 3

Betrachten Sie für  $a > 0$  die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $x \mapsto x^2 - a$ . Zeigen Sie, dass die zugehörige Newton-Funktion  $T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  eine Kontraktion des Intervalls  $[\sqrt{a/2}, \frac{3}{2}\sqrt{a/2}]$  mit Kontraktionskonstante  $L = 1/2$  ist. Bestimmen Sie den eindeutigen Fixpunkt von  $T$ .

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 13.05.2014, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128