

## Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaften II

### Blatt 7

#### Aufgabe 1

Betrachten Sie die DGL  $\ddot{x} = g(x)$ .  $G$  sei eine Stammfunktion der stetigen Funktion  $g$ .

- (a) Sei  $x(t)$  eine Lösung der Differentialgleichung. Zeigen Sie, dass  $x$  die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = G(x) + c$$

mit  $c = \frac{(\dot{x}(t_0))^2}{2} - G(x(t_0))$  erfüllt, wobei  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

- (b) Lösen Sie mit Teil (a) das AWP

$$\ddot{x} = -\gamma \frac{1}{x^2}, \quad x(0) = x_0 > 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma}{x_0}} > 0,$$

wobei  $\gamma$  eine positive Konstante ist.

*Hinweis.* Teil (a): Folgt durch Differentiation (Folgerung 9 aus Analysis I).

**(3+3 Punkte)**

#### Aufgabe 2

Es seien  $V, W$  Vektorräume über dem Körper  $K$ . Weiter sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Setze für  $w \in W$

$$f^{-1}(\{w\}) := \{v \in V \mid f(v) = w\}.$$

Insbesondere ist also  $f^{-1}(\{0\}) = \text{Ker}(f)$  ein Untervektorraum von  $V$ . Zeigen Sie, dass für  $b \in W$  mit  $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$  gilt

$$f^{-1}(\{b\}) = v_p + \text{Ker}(f),$$

wobei  $v_p \in f^{-1}(\{b\})$  eine beliebige (partikuläre) Lösung von  $f(v) = b$  ist. Man erhält also alle Lösungen von  $f(v) = b$ , indem man sämtliche Lösungen von  $f(v) = 0$  zu  $v_p$  addiert.

**(4 Punkte)**

#### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für eine beliebige quadratische Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  und eine invertierbare Matrix  $U \in \text{GL}(n, K)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(UAU^{-1})^n = UA^nU^{-1}.$$

(2 Punkte)

**Aufgabe 4**

Bestimmen Sie sämtliche Eigenvektoren der Spiegelung des  $\mathbb{R}^2$  an der  $y$ -Achse. Was sind die zugehörigen Eigenwerte? Gibt es eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ , bestehend aus Eigenvektoren? Diskutieren Sie diese Fragen auch für eine Drehung des  $\mathbb{R}^2$  gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung mit Drehwinkel  $\theta \neq 0, \pi$ .

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 03.06.2016, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128