Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 4

Aufgabe 1
Geben Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit

(a) $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ und $a_n + b_n \to \infty$.

(b) $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ und $a_n + b_n \to -\infty$.

(c) $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ und $a_n + b_n$ konvergent.

(d) $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$ und $a_n b_n \to \infty$.

(e) $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$ und $a_n b_n \to 0$.

(f) $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$ und $a_n b_n \to c$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2
Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{2n+4}{7n^2+n+1}$.

(b) $a_n = \frac{2n^3-n^2-n+4}{7n^3+(-1)^n n+2}$.

(c) $a_n = \frac{3n^4-(-1)^n n^2-n+4}{-7n^2-3n-2}$.

(d) $a_n = \frac{n}{2^n}$.

(e) $a_n = \frac{n^k}{2^n}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ fest.

(f) $a_n = 2^{-n}\binom{n}{k}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ fest.

Hinweis. Teil (d): Verwenden Sie die Ungleichung $2^n \geq n^2$ für $n \geq 4$ von Übungsblatt 2. Teil (e): Beweisen Sie zunächst die Ungleichung $2^n \geq \binom{n}{k+1}$ für $n \geq k+1$ (Binomischer Lehrsatz).

Aufgabe 3
Beweisen Sie die allgemeine Aussage aus der Vorlesung über die Konvergenz bzw. bestimmte Divergenz von Folgen der Form $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $P(X)$ und $Q(X)$ Polynome sind.

Aufgabe 4
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die der Rekursion

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt (insbesondere soll $a_n \neq 0$ stets erfüllt sein). Nehmen Sie an, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent. Zeigen Sie, dass dann der Grenzwert Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ ist.