Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 10

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass für die Funktionen sinh und cosh auf Übungsblatt 10 gilt:

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ 1 &= \cosh^2(x) - \sinh^2(x)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2
Sei $D := \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Betrachten Sie die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, gegeben durch $x \mapsto \frac{x}{x-1}$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(c) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f.

(d) Bestimmen Sie (sofern existent) die Limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

(e) Bestimmen Sie das Bild $E = f(D)$ von f und bestimmen Sie eine explizite Beschreibung der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon E \to D$.

(f) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(g) Untersuchen Sie f auf gleichmäßige Stetigkeit.

(h) Hat f eine *stetige Fortsetzung* auf ganz $\mathbb{R}$, d.h. existiert eine stetige Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deren Einschränkung auf D gerade f ist?

Aufgabe 3
Bestimmen Sie den Limes $\lim_{x\searrow 0} x\ln(x)$.

Hinweis. Verwenden Sie, dass gilt $\lim_{z\to+\infty} \frac{P(z)}{e^z} = 0$, wobei P eine beliebige Polynomfunktion ist. Setzen Sie außerdem $x = e^z$ mit $z \in \mathbb{R}$ (Warum ist das hier möglich?) und schreiben Sie den Limes in Abhängigkeit von z.