Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 5

Aufgabe 1
Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Limes.

(a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

(b) $b_n = \frac{n^3+4n^2-n-1}{(-1)^n n^3+n+1}$.

(c) $c_n = \frac{n^6+4^n n!+2n^n-n-1}{(-1)^n n^3+(5n)^n+3n+2}$.

Hinweis. Teil (a): Das geht ganz elementar. Teil (c): Verwenden Sie Ihr Ergebnis von Teil (a).

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 2 (Sandwich-Lemma)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit

$$a_n \le b_n \le c_n$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Sind dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent mit Limes $g \in \mathbb{R}$, so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Limes g.

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis. Bestimmen Sie zunächst $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}$ für alle $n \ge 1$.

(3 Punkte)

Aufgabe 4
Berechnen Sie das unendliche Produkt $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^3-1}$, also den Limes

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{n=2}^{k} \frac{n^3+1}{n^3-1},$$

sofern dieser existiert.

Hinweis. Es gilt $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$ bzw. $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$.

(3 Punkte)

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass eine Folge genau dann konvergent ist, wenn Sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt hat.

(3 Punkte)

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe)
Zeigen Sie, dass das Vollständigkeitsaxiom aus dem Dedekindschen Schnittaxiom folgt.

Hinweis. Betrachten Sie zu einer Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ die Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \bigcup \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \Big)$$

und

$$B := \{y \in \mathbb{R} \mid y > b_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} .$$

Bilden A und B einen Dedekindschen Schnitt? Kann B ein kleinstes Element besitzen?

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 26.05.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128