Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 7

Aufgabe 1
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, sagen wir $|a_n| \leq K$ für alle $n \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergiert.

(b) Ist $a_1 \neq 0$, so gilt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| < \frac{|a_1|}{2K}$.

Hinweis. Teil (a): Majorantenkriterium. Teil (b): Für $x \neq 0$ gilt (Nachrechnen!) $f(x) = 0 \iff -a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^n$. Zeigen Sie, dass diese Identität unter der Voraussetzung $0 < |x| < \frac{|a_1|}{2K}$ nicht gelten kann, indem Sie den Absolutbetrag der rechten Seite geeignet nach oben abschätzen.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

konvergiert, ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst aber divergiert.

Hinweis. Zur Divergenz des Cauchy-Produkts: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst, also $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Zeigen Sie, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Betrachten Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Reihen

$$\begin{aligned} c(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent sind.

(b) Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} c(x+y) &= c(x)c(y) - s(x)s(y) \\ s(x+y) &= s(x)c(y) + c(x)s(y)\,. \end{aligned}$$

Hinweis. Teil (b): Verwenden Sie den Satz über das Cauchy-Produkt von Reihen zusammen mit dem Binomischen Lehrsatz.

(2+6 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 09.06.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128