Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 12

Aufgabe 1 (Der Kreisbogen von 1 bis $\mathbf{e^{ix}}$ hat die Länge $|\mathbf{x}|$)
Sei x eine reelle Zahl und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Betrachten Sie die Punkte

$$P_k^{(n)} \; = \; e^{i\frac{k}{n}x}\,, \qquad k = 0, \ldots, n\,,$$

auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene zusammen mit der Länge L_n des zugehörigen Polygonzugs $(P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \ldots, P_n^{(n)})$ von $P_0^{(n)} = 1$ bis $P_n^{(n)} = e^{ix}$, also

$$L_n \; = \; \sum_{k=1}^{n} |P_k^{(n)} - P_{k-1}^{(n)}|\,.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $L_n = 2n|\sin(\frac{x}{2n})|$.

(b) $\lim_{n\to\infty} L_n = |x|$.

Hinweis. Teil (b): Der Absolutbetrag abs: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, ist eine stetige Funktion.

(3+1 Punkte)

Aufgabe 2
Betrachten Sie die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Bilder von Parallelen zur imaginären Achse sind genau die Kreislinien um den Ursprung mit positivem Radius. Wie hängen Realteil der Gerade und Radius des Kreises zusammen?

(b) Die Bilder von Parallelen zur reellen Achse sind genau die Strahlen vom Nullpunkt aus, ohne den Nullpunkt. Wie hängen Imaginärteil der Geraden und Winkel zwischen dem Strahl und der reellen Achse zusammen?

Hinweis. Teil (b): Der Winkel zwischen e^{ix} (bzw. dem dadurch bestimmten Strahl vom Nullpunkt aus) und der reellen Achse ist per Definition x (vgl. Aufgabe 1).

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3
Sei $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das Bild von f ist $\mathbb{C}^*$.

(b) Zu jeder komplexen Zahl $a \in \mathbb{C}^*$ gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ und $f(z_n) = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $z_n \in \mathbb{C}^*$, sodass $f(z_n)$ reell ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $n \to \infty$ bestimmt gegen $-\infty$ divergiert.

Hinweis. Teil (b): Versuchen Sie eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \neq 0$ für alle n und $1/|z_n| \to +\infty$.

(1+2+2 Punkte)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{, falls } x \neq 0; \\ 0 & \text{, falls } x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $a = 0$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung in diesem Punkt. Skizzieren Sie den Graphen von f.

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 14.07.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128