

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die folgenden reellen Matrizen A invertierbar sind und berechnen Sie ggf. die Inverse A^{-1} :

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und bestimmen Sie A^{-1} sowie $\det(A)$. Geben Sie für die Berechnung der Determinante mindestens zwei Lösungswege an.

Aufgabe 3

Es bezeichne $GL_n(\mathbb{Z})$ die Einheitengruppe des Rings $M_n(\mathbb{Z})$ (also die invertierbaren ganzzahligen Matrizen A mit einer ganzzahligen inversen Matrix A^{-1}). Zeigen Sie, dass gilt:

$$A \in GL_n(\mathbb{Z}) \iff \det(A) = \pm 1.$$