Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1
Sei K ein Körper und seien $a, b \in K$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch Anwendung der Körperaxiome:

(i) $a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

(ii) $-a = (-1) \cdot a$.

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2
Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie durch Anwendung der Vektorraumaxiome, dass für $a \in K$ und $v \in V$ gilt

$$a \cdot v = 0 \iff a = 0 \vee v = 0\,.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 3
Sei K ein Körper und sei I eine nicht-leere Menge. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Mengen K^I ist bezüglich der in der Vorlesung definierten Addition und skalaren Multiplikation tatsächlich ein K-Vektorraum.

(b) $K^{(I)}$ ist ein Teilraum von K^I und damit selbst ein K-Vektorraum.

(2+1 Punkte)

Aufgabe 4
Seien R, S, T Teilräume eines K-Vektorraums V. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $T \subset R$, so gilt $R \cap (S + T) = (R \cap S) + T$.

(ii) Es gilt $R \cap (S + T) = (R \cap S) + (R \cap T)$.

(iii) Es gilt $R + (S \cap T) = (R + S) \cap (R + T)$.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 5
Gegeben Seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{Q}^3 .$$

(i) Zeigen Sie, dass jedes Element von $\mathbb{Q}^3$ als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 geschrieben werden kann. Man sagt, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 ein *Erzeugendensystem* des $\mathbb{Q}^3$ sind.

(ii) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind.

(iii) Geben Sie drei Vektoren aus der Liste v_1, v_2, v_3, v_4 an, die linear unabhängig sind. Läßt sich immer noch jedes Element von $\mathbb{Q}^3$ als Linearkombination dieser drei Vektoren schreiben?

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 03.05.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128