Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1
Sei $n \geq 2$ und sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Zeigen Sie, dass

$$M := \{b_1 - b_2, \ldots, b_{n-1} - b_n, b_n - b_1\}$$

linear abhängig ist und bestimmen Sie eine Basis von $\langle M \rangle$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Es seien U der von den linear unabhängigen Vektoren $(1, 0, 2, -1)$, $(0, 1, 3, 1)$ und W der von den linear unabhängigen Vektoren $(1, 1, -1, 2)$, $(0, 1, 9, -1)$ erzeugte Teilraum des $\mathbb{R}^4$.

(a) Geben Sie eine Basis von $U + W$ an.

(b) Geben Sie eine Basis von $U \cap W$ an (**Zusatzaufgabe**).

(c) Ergänzen Sie die obige Basis $\{(1, 0, 2, -1), (0, 1, 3, 1)\}$ von U auf zwei Weisen so zu Basen des $\mathbb{R}^4$, dass die (insgesamt $2 + 2 = 4$) hinzugefügten Vektoren ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

Hinweis. Teil (a): Nach Präsenzübungsblatt 4 gilt $U + W = \langle U \cup W \rangle$. Teil (b): Können Sie $U \cap W$ unter Verwendung der gegebenen Basen von U bzw. W explizit bestimmen?

(4+4+6 Punkte)

Aufgabe 3
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Beschreiben Sie explizit ein Verfahren, um aus einem endlichen Erzeugendensystem E von V eine endliche Basis $B \subset E$ zu konstruieren.

(2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 17.05.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128