Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
Blatt 7

Aufgabe 1
Seien U, W Teilräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) U ist komplementärer Teilraum von W in V (in Zeichen: $V = U \oplus W$).

(ii) Gegeben Basen B von U und B' von W. Dann ist die Vereinigung $B \cup B'$ eine Basis von V.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und seien U_1, U_2 zwei verschiedene $(n-1)$-dimensionale Teilräume. Zeigen Sie, dass $\dim(U_1 \cap U_2) = n - 2$ gilt.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $U_1 + U_2 = V$ gilt.

(2 Punkte)

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Ränge der folgenden Matrizen.

(a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & t \end{pmatrix}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R}\,.$$

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 4
Seien m, n natürliche Zahlen und sei A eine $m \times m$-Matrix, B eine $m \times n$-Matrix und C eine $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie die folgende Abschätzung für den Rang der Matrix $D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$:

$$\mathrm{Rang}(D) \geq \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(C)\,.$$

Hinweis. Verwenden Sie eine geeignete Charakterisierung des Rangs einer Matrix.

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 01.06.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128