Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1

Der Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V besitze bzgl. einer geordneten Basis von V eine Koordinatenmatrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = 0$.

(b) $id_V + f$ ist ein Automorphismus von V mit $(id_V + f)^{-1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^i$.

(4+2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Koordinatenmatrix einer linearen Abbildung $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ bzgl. der Basis $B = (e_1+e_2, e_2+e_3, e_2)$ von $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix von f bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$ und der Basis

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^4$.

Hinweis. Berechnen Sie zunächst $f(e_1)$, $f(e_2)$ und $f(e_3)$. Was sind die zugehörigen Koordinaten bzgl. C?

(6 Punkte)

Aufgabe 3

Seien A und B zwei äquivalente $m \times n$-Matrizen (in Zeichen: $A \sim B$) über einem Körper K. Zeigen Sie, dass gilt $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4

Für $1 \leq i, j \leq n$ definiere die Matrix $E_{ij} \in M_n(K)$ durch $E_{ij} e_k := \delta_{jk} e_i$, wobei δ das *Kronecker-Delta* bezeichnet, d.h. $\delta_{jj} = 1$ und $\delta_{jk} = 0$ für $k \neq j$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Die E_{ij} bilden eine Basis von $M_n(K)$.

(b) $E_{rs}E_{ij} = \delta_{si}E_{rj}$.

(c) $T_{ij}(a) = \mathbb{1}_n + aE_{ij}$ für alle $i \neq j$.

(d) $T_{ij}(a)T_{ik}(b) = T_{ik}(b)T_{ij}(a)$ für alle $i \neq j, k$.

Hinweis. Teil (d): Verwenden Sie Teile (b) und (c).

(1+1+1+1 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 28.06.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128