Klausurübungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik

Aufgabe 1

Wieviele Teilmengen hat die Menge der Teilmengen der Menge $\{1, \dots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Anzahl der Wörter der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit Buchstaben aus dem Alphabet $\{1, \dots, k\}$, wobei $k \in \mathbb{N}$. Wieviele dieser Wörter benutzen keinen Buchstaben mehrmals und wieviele sind nicht absteigend?

Aufgabe 3

Schreiben Sie die Permutation $\pi \in S_{10}$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 8 & 10 & 3 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

in Zykelschreibweise und bestimmen Sie die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $\pi^k = \text{id}$. Wie bestimmt man dieses k im Allgemeinen?

Aufgabe 4

In einem Kurs spielen 28 Studenten Skat, 8 Schach und 32 Fussball. Von den Studenten spielen 6 Skat und Schach, 22 Skat und Fussball, und 2 Schach und Fussball. Ausserdem gibt es einen Studenten, der alle Spiele spielt. Wieviele Studenten spielen mindestens eines der Spiele?

Aufgabe 5

Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus Rechtecken der Seitenlängen 1×3 und 3×3 ein Rechteck mit Seitenlängen $n \times 3$ zu legen? Bestimmen Sie hier nur eine Rekursion und stellen Sie die erzeugende Funktion $F(X)$ als rationale Funktion $P(X)/Q(X)$ dar. Können Sie die Rekursion mit der Methode der linearen Algebra lösen?

Aufgabe 6

Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die rekursiv gegeben ist durch:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \quad (n \geq 2).$$

Berechnen Sie die ersten 10 Folgenglieder, die erzeugende Funktion und daraus eine allgemeine (nichtrekursive) Formel für die a_n . Lösen Sie die Rekursion ebenfalls mit der Methode der linearen Algebra.

Aufgabe 7

Betrachten Sie das Poset $(\text{Part}(\{1, 2, 3, 4\}), \preceq)$ der Partitionen von $\{1, 2, 3, 4\}$ mit der Partialordnung "Verfeinerung". Zeigen Sie, dass es in diesem Poset ein (hier mit 0 bezeichnetes) minimales und ein (hier mit ∞ bezeichnetes) maximales Element gibt und beschriften Sie die Vertices u des zugehörigen Ordnungsgraphen (damit ist der dem Segment $[0, \infty] = \text{Part}(\{1, 2, 3, 4\})$ zugeordnete Ordnungsgraph gemeint) mit den Werten $\mu(0, u)$ der zugehörigen Möbiusfunktion.

Aufgabe 8

Was sagt der Satz über die Möbius-Inversion über eine arithmetische Funktion f und ihre summatorische Funktion F aus?

Aufgabe 9

Welche Elemente in $\mathbb{Z}_n$ haben ein (multiplikative) Inverses? Beschreiben Sie auch, wie man das (multiplikative) Inverse eines invertierbaren Elements von $\mathbb{Z}_n$ berechnen kann.

Aufgabe 10

Zeigen Sie mithilfe modularer Arithmetik, dass Zahlen der Form $2^n + (-1)^{n+1}$, wobei $n \in \mathbb{N}$, durch 3 teilbar sind.

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass eine Dezimalzahl $\sum_{k=0}^n a_k 10^k$ genau dann durch 13 teilbar ist, wenn dies für die Zahl $\sum_{k=0}^n a_k (-3)^k$ gilt.

Aufgabe 12

Beweisen Sie für $k \geq 3$ Sie die Kongruenz

$$10^k \equiv 10^{k-3} \pmod{111}.$$

Welche Regel ergibt sich daraus für die Teilbarkeit einer Dezimalzahl $\sum_{k=0}^n a_k 10^k$ durch 111?

Aufgabe 13

Erläutern Sie das RSA-Verfahren und gehen Sie insbesondere darauf ein, wo man den euklidischen Algorithmus benötigt und welche Rolle der Satz von Fermat spielt.