Universität Bielefeld **Wintersemester 2013/14**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
Blatt 2

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsring R sogar ein Körper ist.

Hinweis. Ein Integritätsring ist ein nullteilerfreier, kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Hier ist also nur noch zu zeigen, dass es zu jedem $x \neq 0$ ein multiplikatives Inverses gibt. Betrachten Sie dazu die Abbildung $m_x \colon R \to R$, gegeben durch Multiplikation mit x von links (also $m_x(r) = xr$). Zeigen Sie, dass m_x eine Bijektion ist (vgl. dazu Aufgabe 1 auf Präsenzübungsblatt 1).

Aufgabe 2
Schreiben sie die Permutationen

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 1 & 9 & 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

und

$$\beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 10 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

in Zykelschreibweise und bestimmen Sie das Signum von α und β. Berechnen Sie anschließend $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^2, β^2, α^{-1} und β^{-1}. Bestimmen Sie außerdem die Ordnungen der kleinsten Untergruppen von S_{10}, die α bzw. β enthalten.

Aufgabe 3
Wieviele Möglichkeiten gibt es, auf einem Parkplatz mit zwölf nebeneinanderliegenden Boxen acht PKWs so zu parken, dass vier nebeneinanderliegende Parkboxen frei bleiben?

Hinweis. Unterscheiden Sie zwei Fälle: 1. die Autos sind ununterscheidbar (es kommt also nur auf die Position der Lücken an), 2. die Autos sind alle verschieden.

Aufgabe 4
Wieviele 8-stellige Telefonnummern gibt es, in denen keine Ziffer doppelt vorkommt? Wieviele 8-stellige Telefonnummern gibt es also, in denen mindestens eine Ziffer doppelt vorkommt?

Aufgabe 5
Welche der folgenden Teilmengen von S_4 sind sogar Untergruppen?

a) $\{\mathrm{id}\}$

b) $\{\mathrm{id}, (12)(34), (12), (34)\}$

c) $\{\mathrm{id}, (1234), (13)(24), (1432)\}$

d) $\{(124), (12), (14), (24), (142)\}$

e) $\{\mathrm{id}, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23),$
$(123), (124), (132), (142), (234), (243)\}$

f) S_4

Begründen Sie Ihre Antwort. Ergänzen Sie diejenigen Teilmengen, die keine Untergruppen sind, durch Hinzufügen möglichst weniger Elemente zu einer Untergruppe.

Aufgabe 6
Beweisen Sie für $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ die *Vandermondesche Identität*

$$\binom{l+m}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{l}{i} \binom{m}{n-i}.$$

Hinweis. Das folgt aus der Definition der Binomialkoeffizienten zusammen mit der Summen- bzw. Produktregel. Wie genau?