Universität Bielefeld **Wintersemester 2013/14**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Blatt 6

Aufgabe 1
Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass eine formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in K[[X]]$ genau dann (multiplikativ) invertierbar ist, wenn a_0 von Null verschieden ist.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n X^n = \frac{1}{1-\alpha X}\,.$$

Aufgabe 3
Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die erzeugende Funktion $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, rekursiv gegeben durch

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0\,; a_k = 1$$

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} a_{n-i} \quad (n \geq k)\,,$$

gegeben ist durch

$$F(X) = \frac{X^k}{1 - X - X^2 - \cdots - X^{k+1}}.$$

Aufgabe 4
Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei erneut a_n die Anzahl der Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{1, 2, 3\}$, in denen *niemals* zwei 1'en hintereinander vorkommen, also z.B. $a_1 = 3$, $a_2 = 8$ und $a_3 = 22$. Laut Aufgabe 2 auf Übungsblatt 5 gilt mit $a_0 := 1$ für alle $n \geq 2$ die Rekursion

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) Die erzeugende Funktion $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gegeben durch

$$F(X) = \frac{1 + X}{1 - 2X - 2X^2}$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n$$

Hinweis. Verwenden Sie für Teil (b) diesmal die Identität

$$\frac{1}{1 - 2X - 2X^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \frac{1}{1 - (1 + \sqrt{3})X} + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \frac{1}{1 - (1 - \sqrt{3})X}$$

zusammen mit der Methode der erzeugenden Funktionen.