Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2013/14

Präsenzübungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Blatt 7

Aufgabe 1
Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ_F der Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n \, .$$

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass in $\mathbb{C}[[X]]$ gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} X^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} X^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \Big) X^n \, .$$

Aufgabe 3
Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei gegeben durch die Rekursion

$$a_0 = 0, \;\; a_1 = 1, \;\; a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} \;\; (n \geq 2)$$

Zeigen Sie, dass die erzeugende Funktion $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Identität

$$F(X) = \frac{X}{1 - 7X + 12X^2}$$

erfüllt und bestimmen Sie daraus eine allgemeine nichtrekursive Formel für die a_n.

Aufgabe 4
Gegeben sei die folgende Rekursion:

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n/4, \;\; a_0 = 0, a_1 = 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Berechnen Sie die ersten 10 Folgenglieder, raten Sie eine Formel für die a_n und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion nach n. Berechnen Sie anschließend die zugehörige erzeugende Funktion und leiten Sie daraus eine allgemeine (nichtrekursive) Formel für die a_n ab.