Universität Bielefeld **Wintersemester 2013/14**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Blatt 9

Aufgabe 1
Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sind Äquivalenzrelationen?

(a) $(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow (a = c \vee b = d)$.

(b) $(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow a + b = c + d$.

(c) $(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow ad = bc$.

(d) $(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow a + 2c = b + 2d$.

Für jene Relationen, die tatsächlich Äquivalenzrelationen sind, geben Sie die Äquivalenzklasse von $(1, 2)$ an.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$, gegeben durch

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad ab > 0$$

symmetrisch und transitiv, aber *nicht* reflexiv ist.

Hinweis. Für welche Elemente $a \in \mathbb{Z}$ gilt $0 \sim a$?

Aufgabe 3
Wo ist der Fehler in dem folgenden "Beweis" dafür, dass eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge X automatisch reflexiv ist?

Aus $x \sim y$ folgt wegen der Symmetrie auch $y \sim x$. Wegen der Transitivität folgt daraus $x \sim x$. Also gilt $x \sim x$ für alle $x \in X$.

Hinweis. Vgl. Aufgabe 2.

Aufgabe 4
Geben Sie eine reflexive und symmetrische Relation auf $\mathbb{Z}$ an, die *nicht* transitiv ist.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie für die folgenden Posets $(X, \preccurlyeq)$ mit endlichen Segmenten die angegebenen Segmente $[x, y]$ und stellen Sie das Ergebnis im zugehörigen Ordnungsgraphen dar.

(a) $[k, n]$ in $(\mathbb{N}, \leq)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $n = k + 7$.

(b) $[S, A]$ in $(\mathcal{P}(X), \subset)$, wobei X eine endliche Menge mit Teilmenge S ist und $w, x, y, z \in X \setminus S$ paarweise verschieden sind mit $A = S \cup \{w, x, y, z\}$.

(c) $[d, dp^4q^2]$ in $(\mathbb{N}, |)$, wobei $d \in \mathbb{N}$ und p und q zwei verschiedene Primzahlen sind.

(d) $[\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1, 2, 3, 4\}\}]$ in $(\mathrm{Part}(\{1, 2, 3, 4\}), \preccurlyeq)$ mit der Partialordnung "Verfeinerung".

Aufgabe 6

Beschriften Sie die Knoten $u \in [x, y]$ der Odnungsgraphen aus Aufgabe 5 mit den Werten $\mu(x, u)$ der zugehörigen Möbius-Funktionen.