**Universität Bielefeld**
**C. Huck**

**Wintersemester 2013/14**

## Präsenzübungen zur Vorlesung

# Diskrete Mathematik

**Blatt 12**

**Aufgabe 1**
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]_n$ und Nullelement $[0]_n$ ist.

*Hinweis.* Vgl. Theorem 13.2 im Biggs.

**Aufgabe 2**
Bestimmen Sie die letzte Dezimalziffer der Zahl $7^{(7^7)}$.

*Hinweis.* Finden Sie einen geeigneten Repräsentanten von $7^{(7^7)} \pmod{10}$.

**Aufgabe 3**
Beweisen Sie die bekannten Regeln für die Teilbarkeit einer Dezimalzahl $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ durch eine natürliche Zahl $n$:

(a) $2 | \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \iff a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

(b) $3 | \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \iff 3 | \sum_{k=0}^{n} a_k$.

(c) $5 | \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \iff a_0 \in \{0, 5\}$.

(d) $7 | \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \iff 7 | \sum_{k=0}^{n} a_k 3^k$.

(e) $8 | \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \iff 8 | \sum_{k=0}^{n} a_k 2^k$.

(f) $9 | \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \iff 9 | \sum_{k=0}^{n} a_k$.

(g) $11 | \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \iff 11 | \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k$.

*Hinweis.* Finden Sie einen geeigneten Repräsentanten von $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \pmod{n}$.

**Aufgabe 4**
Finden Sie, falls möglich, die (multiplikativen) Inversen von

(a) 5 in $\mathbb{Z}_{11}$,

(b) 7 in $\mathbb{Z}_{12}$,

(c) 1 in $\mathbb{Z}_{2010}$,

(d) 3 in $\mathbb{Z}_{111}$.