Übungen zur Vorlesung Diskrete Mathematik

Blatt 2

Aufgabe 1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Wieviele Injektionen von $\{1, \dots, m\}$ nach $\{1, \dots, n\}$ gibt es? Beweisen Sie Ihre Antwort durch vollständige Induktion nach m .

(4 Punkte)

Aufgabe 2

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wieviele monoton wachsende Abbildungen f von $\{1, \dots, m\}$ nach $\{1, \dots, n\}$ gibt es? Diskutieren Sie ausführlich das Beispiel $m = 3, n = 4$. Beweisen Sie Ihre Antwort.

Hinweis. Wie üblich heißt $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ monoton wachsend falls gilt $f(i) \leq f(j)$ für $i \leq j$. Kodieren Sie die in Frage kommenden f als Folge von Einsen und Nullen der Länge $m + n - 1$. Genauer gesagt ist eine Bijektion von der Menge der Funktionen f in eine gewisse (leicht abzuzählende) Menge von 0-1-Folgen der Länge $m + n - 1$ gesucht.

(6 Punkte)

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Permutation $\pi \in S_{14}$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 8 & 1 & 9 & 2 & 10 & 3 & 11 & 4 & 12 & 5 & 13 & 6 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

- Schreiben Sie π als Produkt (Komposition) von paarweise elementfremden Zyklen.
- Stellen Sie π als Produkt von Transpositionen dar.
- Bestimmen Sie das Signum von π .
- Bestimmen Sie π^2 .
- Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl k mit $\pi^k = \text{id}$.
- Stellen Sie allgemein für $n \in \mathbb{N}$ den Zyklus $(123 \dots n) \in S_n$ als Produkt von Transpositionen dar. Welches Signum hat $(123 \dots n)$? Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl k mit $(123 \dots n)^k = \text{id}$.

Hinweis. Transpositionen sind 2-Zyklen, also Zyklen der Form (ij) , wobei $i \neq j$.

(1+1+1+1+1+1 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 01.11.2013, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128