Universität Bielefeld **Wintersemester 2013/14**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Blatt 3

Aufgabe 1

Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe und g ein Element von G. Zeigen Sie, dass die Abbildung $m_g \colon G \to G$, gegeben durch Multiplikation mit g von links (also $m_g(h) = g \cdot h$), eine Bijektion ist.

Hinweis. Nach Aufgabe 1 auf Präsenzübungsblatt 1 genügt es zu zeigen, dass die Abbildung injektiv ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \in S_n$ eine Permutation.

(a) Wie hängt das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $\pi^k = \mathrm{id}$ mit den Längen der Zyklen in der eindeutigen Zyklendarstellung von π zusammen?

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\pi, \pi^2, \ldots, \pi^{k-1}, \mathrm{id}\}$ (mit k aus Teil (a)) eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n ist.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der 0-1-Folgen der Länge n mit genau k Nullen gleich $\binom{n}{k}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Abbildungen $f \colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(1) + \ldots + f(n) = k$ gegeben ist durch
$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Hinweis. Teil (a): Aufgabe 2(a) auf Übungsblatt 1. Formal sind 0-1-Folgen der Länge n Abbildungen $f \colon \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$. Teil (b): Kodieren Sie die Abbildungen als 0-1-Folgen der Länge $n + k - 1$ mit genau k Nullen und verwenden Sie dann Teil (a).

(2+4 Punkte)

Aufgabe 4
Wieviele Möglichkeiten gibt es,

(a) die Felder eines gewöhnlichen Schachbretts (8×8 Felder) so mit zwei Farben einzufärben, dass jede Farbe gleich oft auftritt?

(b) die Felder eines gewöhnlichen Schachbretts so mit drei Farben $\{1, 2, 3\}$ einzufärben, dass Farbe i mit Häufigkeit h_i auftaucht (also $0 \leq h_i \leq 64$ mit $h_1 + h_2 + h_3 = 64$)?

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 08.11.2013, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128