Universität Bielefeld **Wintersemester 2013/14**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
Blatt 4

Aufgabe 1
Seien n, k natürliche Zahlen. Bestimmen Sie

(a) die Anzahl der Abbildungen $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\}$.

(b) die Anzahl der injektiven Abbildungen $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\}$.

(c) die Anzahl der Bilder von injektiven Abbildungen $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\}$.

(d) die Anzahl der monoton wachsenden Abbildungen $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\}$.

Hinweis. Hier genügt ausnahmsweise die schlichte Nennung der Ergebnisse (ohne Begründung).

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2
Sei n eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie

(a) die Anzahl der Permutationen aus S_n, die keinen Fixpunkt haben.

(b) die Anzahl der Permutationen aus S_n, die mindestens einen Fixpunkt haben.

(c) die Anzahl der Permutationen aus S_n, die genau k Fixpunkte ($1 \leq k \leq n$) haben.

Hinweis. Ein Fixpunkt von $\pi \in S_n$ ist ein $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\pi(i) = i$. Hier benötigen Sie die Siebformel.

(3+1+2 Punkte)

Aufgabe 3
Definiere für $d \in \mathbb{N}$

$$\mu(d) := \begin{cases} 1 & \text{falls } d = 1, \\ (-1)^k & \text{falls } d \text{ das Produkt von } k \text{ paarweise verschiedenen Primzahlen ist,} \\ 0 & \text{falls } d \text{ durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist.} \end{cases}$$

Sei nun $m > 1$ eine natürliche Zahl und sei

$$m = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{r_l}$$

die Primfaktorzerlegung von m. Setze $A := \{m\}$ und für $1 \leq i \leq l$

$$A_i := \bigl\{x \in A \bigm| p_i | x\bigr\}.$$

Bestimmen Sie die Mengen A_i und zeigen Sie, dass gilt:

$$A = \bigcup_{i=1}^{l} A_i.$$

Wieviele Elemente hat also die Menge $\bigcup_{i=1}^{l} A_i$? Wenden Sie nun die Siebformel auf die Familie der A_i an, um zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{d|m} \mu(d) = 0,$$

wobei hier über die positiven Teiler von m summiert wird (also $d \geq 1$). Können Sie diese unter Verwendung der obigen Primfaktorzerlegung von m auflisten?

Hinweis. Hier setzen wir den Fundamentalsatz der Elementaren Zahlentheorie und die Teilerrelation $a|b$ als bekannt voraus.

(6 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 15.11.2013, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128