Universität Bielefeld **Wintersemester 2013/14**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
Blatt 5

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f\colon \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$.

Hinweis. Sei X die Menge aller Abbildungen $f: \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$. Für $1 \le i \le n$ definiere A_i als die Menge der Abbildungen $f\colon \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ mit $i \notin f(\{1,\dots,m\})$. Gesucht ist also

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Wieviele Wörter a_n der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit Buchstaben aus dem Alphabet $\{1,2,3\}$ gibt es, in denen *niemals* zwei 1'en hintereinander vorkommen?

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $a_1 = 3$ und $a_2 = 8$.

(b) Für alle $n \ge 3$ gilt die Rekursion

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

(c) Drücken Sie die Rekursion in Matrixschreibweise aus und zeigen Sie, dass die zugehörige 2×2-Matrix M diagonalisierbar ist. Was sind die Eigenwerte?

(d) Leiten Sie eine explizite (nichtrekursive) Formel für die a_n ab.

(2+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3
Bestimmen Sie eine explizite (nichtrekursive) Formel für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv gegeben ist durch:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad (n \ge 3).$$

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 22.11.2013, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128