Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Blatt 7

Aufgabe 1
Wieviele Wörter a_n der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit Buchstaben aus dem Alphabet $\{1, \ldots, k\}$, wobei $k \geq 2$, gibt es, in denen *niemals* zwei 1'en hintereinander vorkommen?

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $a_1 = k$, $a_2 = k^2 - 1$ und $a_3 = k^3 - 2k + 1$.

(b) Setzt man $a_0 := 1$, dann gilt für alle $n \geq 2$ die Rekursion

$$a_n = (k-1)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}$$

(c) Die (gewöhnliche) erzeugende Funktion $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ erfüllt die Identität

$$F(X) = \frac{1+X}{1+(1-k)X+(1-k)X^2}$$

(d) Es gilt

$$F(X) = \frac{1+X}{1-k}\left(\frac{1/(\sigma-\tau)}{X-\sigma} + \frac{1/(\tau-\sigma)}{X-\tau}\right),$$

wobei σ und τ die *zwei reellen* Nullstellen des quadratischen Polynoms $X^2 + X + \frac{1}{1-k}$ bezeichnen.

(e) Erläutern Sie abschließend, wie man nun, ausgehend von Teil (d), im Prinzip (nicht im Detail!) eine allgemeine nichtrekursive Formel für die a_n erhält.

(f) Wie lautet alternativ der richtige Ansatz für die a_n, den die Methode der Linearen Algebra liefert?

(2+2+2+3+2+3 Punkte)

Aufgabe 2
Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$. Beweisen Sie die Identität

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n-k} = f_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

indem Sie zeigen, dass die (gewöhnlichen) erzeugenden Funktionen von $(f_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ übereinstimmen.

Hinweis. Die erzeugende Funktion von $(f_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist laut Vorlesung (Domino-Pflasterung) gegeben durch $F(X) = 1/(1 - X - X^2)$. Sie müssen hier also nur noch zeigen, dass gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = 1/(1-X-X^2)$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die oben definiert Folge ist. Verwenden Sie dazu das übliche Verfahren zusammen mit der Identität $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} X^n = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} X^n = (1+X)^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 06.12.2013, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128