Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
Blatt 8

Aufgabe 1
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_1(n,k) X^k = X(X+1) \cdot \ldots \cdot (X+(n-1)) \, .$$

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_2(n,k) X^n = \frac{X^k}{(1-X)(1-2X) \cdot \ldots \cdot (1-kX)} \, .$$

Hinweis. Vollständige Induktion nach n bzw. k unter Verwendung der bekannten Rekursionsformeln.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2
Seien n, k natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Die Anzahl der Surjektionen $f \colon X \to Y$, wobei $|X| = n$ und $|Y| = k$, ist gleich

$$k! \, s_2(n,k) \, .$$

(b)

$$s_2(n,k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \frac{j^n}{j!(k-j)!} \, .$$

Hinweis. Teil (a): Solche Surjektionen definieren auf natürliche Weise eine Partition von X mit k Teilen. Wie genau? Teil (b): Teil (a) zusammen mit Aufgabe 1 auf Übungsblatt 5.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 3
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ und *alle* $N \geq n$ gilt

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} s_2(n,k) = \sum_{j=1}^{N} \frac{j^n}{j!} \sum_{s=0}^{N-j} \frac{(-1)^s}{s!} \,.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!} \,.$$

Hinweis. Teil (a): Aufgabe 2(b). Teil (b): Folgt aus Teil (a) im Limes $N \to \infty$.

(3+1 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 13.12.2013, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128