Universität Bielefeld **Wintersemester 2013/14**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Blatt 9

Aufgabe 1
Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ zusammen mit ihrer Untergruppe $n\mathbb{Z}$ der ganzzahligen Vielfachen von n. Definieren Sie eine Relation auf $\mathbb{Z}$ durch

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad a - b \in n\mathbb{Z}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse C_a von $a \in \mathbb{Z}$ gegeben ist durch

$$C_a = a + n\mathbb{Z} := \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) Wie sieht die zugehörige Partition $\{C_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{Z}$ aus? Wieviele Teile gibt es?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass es einem Poset $(X, \preccurlyeq)$ höchstens ein minimales Element 0 geben kann.

Hinweis. Beweis durch Widerspruch. Verwenden Sie die Antisymmetrie der Partialordnung.

(2 Punkte)

Aufgabe 3
Sei $(X, \preccurlyeq)$ ein Poset mit endlichen Segmenten und minimalem Element 0. Sei weiter $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit zugehöriger summatorischer Funktion $g\colon X \to \mathbb{C}$, also

$$g(x) = \sum_{0 \preccurlyeq u \preccurlyeq x} f(u)\,.$$

Betrachte $x \in X$ und das Segment $[0, x] = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Nummerierung der Elemente des Segments

$$[0, x] = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

so gewählt werden kann, dass $x_i \not\preccurlyeq x_j$ für $i > j$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die bezüglich der Nummerierung aus Teil (a) definierte $n \times n$-Matrix $M = (m_{ij})$, gegeben durch

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_j \preccurlyeq x_i; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases},$$

untere Dreiecksmatrix und invertierbar ist und die Identität

$$M \cdot (f(x_1), \ldots, f(x_n))^t = (g(x_1), \ldots, g(x_n))^t$$

erfüllt, wobei x^t für einen Zeilenvektor x wie üblich den zugehörigen Spaltenvektor bezeichnet. Es gilt also

$$(f(x_1), \ldots, f(x_n))^t = M^{-1} \cdot (g(x_1), \ldots, g(x_n))^t.$$

(c) Zeigen Sie, dass für geeignete $a_i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(x_i),$$

$f(x)$ ist also ganzzahlige Linearkombination der $g(u)$, wobei $u \in [0, x]$.

Hinweis. Teil (a): Wie konstruiert man i.Allg. den Ordnungsgraphen eines endlichen Segments? Teil (b): Nachrechnen. Teil (c): Was ist die Determinante von M? Kennen Sie eine Formel für das Inverse einer Matrix? Ist M^{-1} ganzzahlig?

(4+2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 20.12.2013, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128