Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
Weihnachtsblatt (Blatt 10)

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für die Möbius-Funktion μ und die Kronecker-Funktion δ eines Posets $(X, \preccurlyeq)$ mit endlichen Segmenten und minimalem Element gilt:

$$\mu * \zeta = \zeta * \mu = \delta.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2

Beweisen Sie die bekannten Formeln für die Möbius-Funktionen der folgenden Posets mit endlichen Segmenten und minimalem Element.

(a) $(\mathbb{N}, \leq)$.

(b) $(\mathcal{P}(X), \subset)$, wobei X eine endliche Menge ist.

Hinweis. Beweis durch vollständige Induktion.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $A := \{a_1, \dots, a_m\}$ ein *Alphabet* mit $m \in \mathbb{N}$ verschiedenen *Buchstaben*. Ein *Wort* der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit Buchstaben in A ist eine Abbildung $\varphi\colon \{1, \dots, n\} \to A$, also eine Folge der Länge n mit Folgengliedern aus A. Wir sagen, dass zwei Wörter φ und φ' dasselbe *Kreiswort* darstellen, falls φ' aus φ durch zyklische Umordnung hervorgeht, z.B. stellen

$$abcdabdcadbcc$$

und

$$bccabcdabdcad$$

dasselbe Kreiswort dar. Man nennt $p > 0$ eine *Periode* des Wortes φ, falls φ nach p zyklischen Umordnungen (bei einer zyklischen Umordnung wandert der letzte Buchstabe and die erste Position) in sich selbst übergeht, z.B. sind $p = 3, 6, 9, \dots$ die Perioden des Wortes

$$abcabcabc\,.$$

Die *primitive Periode* von φ ist die kleinste Periode p. Wir bezeichnen mit $W_m(n)$ die Menge der Wörter der Länge n mit Buchstaben aus A. Weiter bezeichnet $M_m(p)$ die Anzahl der Kreiswörter der Länge n mit Buchstaben in A, deren primitive Periode p ist.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Element von $W_m(n)$ die Periode n hat. Zeigen Sie weiter, dass die primitive Periode p eines Elements von $W_m(n)$ stets Teiler von n ist. Wie sehen die Wörter aus $W_m(n)$ mit primitiver Periode p aus?

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$m^n = \sum_{\underline{p}|n} p M_m(p).$$

(c) Verwenden Sie Teil (b) und Möbiusinversion, um eine Formel für die Anzahl

$$C_m(n) := \sum_{\underline{p}|n} M_m(p)$$

aller Kreiswörter der Länge n mit Buchstaben aus A zu bestimmen.

(d) Berechnen Sie $C_3(6)$.

Hinweis. Teil (b): Was ist die Anzahl aller Wörter der Länge n mit Buchstaben aus dem Alphabet A?

(3+2+2+2 Punkte)

Zusatzaufgabe 4
Beweisen Sie die bekannte Formel für die Möbius-Funktionen des Posets $(\mathbb{N}, |)$.

Hinweis. Beweis durch vollständige Induktion. Verwenden Sie, dass die Möbius-Funktion μ von $(\mathbb{N}, |)$ in dem folgenden Sinne *multiplikativ* ist: Es gilt

$$\mu(d, dab) = \mu(d, da)\mu(d, db)$$

für alle $d, a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ (a und b haben keinen gemeinsamen Primteiler).

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe 5
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $I \subset \{1, \ldots, n\}$ die Identität

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{I \subset \underline{J}} \left|\bigcap_{j\in J} A_j \setminus \bigcup_{j\notin J} A_j\right|$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass aus Teil (a) das bekannte Einschluss-Ausschluss-Prinzip

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|$$

folgt.

Hinweis. Teil (b): Möbiusinversion.

(4+6 Punkte)

**Ich wünsche Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!**

Abgabe bis Freitag, 10.01.2014, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128