Universität Bielefeld **Wintersemester 2013/14**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Blatt 11

Aufgabe 1
Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie ohne Verwendung des Fundamentalsatzes der Arithmetik, dass n einen Primteiler hat.

Hinweis. Betrachten Sie die Menge der Teiler von n, die größer als Eins sind. Zeigen Sie, dass diese nicht leer ist. Betrachten Sie dann das kleinste Element dieser Menge und zeigen Sie, dass es prim ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass der Ring

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

bzgl. der Funktion $g\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$, gegeben durch

$$g(a + bi) = a^2 + b^2,$$

einen euklidischen Ring bildet. Bestimmen Sie anschließend die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[i]$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $g(uv) = g(u)g(v)$ für beliebige Elemente $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ gilt. Betrachten Sie dann $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ m it $y \neq 0$. Gesucht sind $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ mit

$$x = qy + r$$

und $g(r) < g(y)$. Versuchen Sie für q einen zu $x/y \in \mathbb{C}$ "nächstgelegenen" Punkt aus $\mathbb{Z}[i]$. Letzterer ist nicht immer eindeutig (für $1/2 + (1/2)i$ hat man z.B. die vier Möglichkeiten $0, 1, 1 + i$ und i).

(4+2 Punkte)

Aufgabe 3
Sie sind an einem Fluß und haben zwei Eimer, einer mit 6 Litern und der andere mit 35 Litern Volumen. Sie haben in weiteren Gefäßen die Möglichkeit, Wasser zwischenzuspeichern. Können Sie durch geschicktes Umfüllen exakt 1995 Liter Wasser erzeugen? Mit welchen anderen Eimergrößen würde es auch funktionieren (welcher Bedingung müssen die Volumina genügen)?

(4 Punkte)

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die folgenden größten gemeinsamen Teiler und die zugehörige diophantische Gleichung:

(a) $\mathrm{ggT}(1995, 35)$ in $\mathbb{Z}$.

(b) $\mathrm{ggT}(X^3 - X^2 + 2X - 1, X^2 + 5)$ in $\mathbb{Q}[X]$.

Hinweis. Euklidischer Algorithmus.

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 17.01.2014, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128