Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2013/14

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Blatt 12

Aufgabe 1
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $n \in \mathbb{N}$ nicht prim ist, dann ist $2^n - 1$ auch nicht prim.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $2^n - 1$ prim ist (wegen Teil (a) ist dann auch n prim), dann ist $2^{n-1}(2^n - 1)$ eine *vollkommene Zahl.* Dabei heißt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ *vollkommen*, falls n genau die Summe ihrer *echten positiven Teiler* ist, falls also gilt:

$$n = \sum_{\substack{d|n \\ 1 \leq d < n}} d\,.$$

Hinweis. Teil (a): Summenformel für die geometrische Reihe.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Kongruenz

$$ax \equiv b \pmod{n}\,,$$

wobei $a, b \in \mathbb{Z}$, genau dann lösbar ist, wenn $\mathrm{ggT}(a, n)$ ein Teiler von b ist.

Hinweis. Verwenden Sie die diophantische Gleichung für $\mathrm{ggT}(a, n)$ oder einen passenden Satz aus der Vorlesung.

(2 Punkte)

Aufgabe 3
Beweisen Sie die folgenden Teilbarkeitsaussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$1111 \,\big|\, (1109^n - (9997)^n)$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$ gilt:

$$(a-1) \,\big|\, (a^n - 1)$$

(c) Für eine *b-adische Zahl* $\sum_{k=0}^{n} a_k b^k$ (d.h. $n \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ und $a_k \in \{0, \ldots, b-1\}$ für alle k) gilt:

$$(b+1) \mid \sum_{k=0}^{n} a_k b^k \iff (b+1) \mid \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k$$

Hinweis. Modulare Arithmetik.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 4
Berechnen Sie die letzte Dezimalziffer von $6^{(6^6)}$.

Hinweis. Rechnen modulo 10.

(2 Punkte)

Aufgabe 5
Berechnen Sie die Einheitengruppen von $\mathbb{Z}_{13}$ und $\mathbb{Z}_{10}$. Was ist $\varphi(13)$ bzw. $\varphi(10)$?

(3 Punkte)

Aufgabe 6
Wie berechnet man auf effiziente Weise das Inverse von a modulo n, falls $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$?

(2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 24.01.2014, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128