Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 4

Aufgabe 1
Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißen *äquivalent* (in Zeichen: $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$), wenn es positive Konstanten $C, C' > 0$ gibt, sodass

$$\|v\| \leq C\,\|v\|'$$

und

$$\|v\|' \leq C'\,\|v\|$$

für alle $v \in V$ gilt. Geben Sie explizite Konstanten für die Ihnen bekannten Paare von Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ an. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz $\sim$ von Normen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf V ist.

Hinweis. Für die Äquivalenz der 1-Norm und der Euklidischen Norm benötigen Sie evtl. die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2)$.

Aufgabe 2
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn jeder Berührpunkt von A bereits ein Element von A ist.

Aufgabe 3
Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $B[a, b]$ der beschränkten Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm. Ist die Teilmenge der Treppenfunktionen eine abgeschlossene Menge?

Aufgabe 4
Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen bzw. offen sind. Bestimmen Sie jeweils Abschluss, Inneres sowie den Rand.

(a) $M_1 = \mathbb{Q}^2$.

(b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$.

(c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

(d) $M_4 = M_2 \cap M_1$.

(e) $M_5 = M_3 \cap M_1$.