Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung
Analysis II
Blatt 6

Aufgabe 1
Sei X eine unendliche Menge (z.B. $X = \mathbb{N}$) und sei d die diskrete Metrik auf X, gegeben durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \neq y; \\ 0 & , \text{ falls } x = y\,. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die offenen Mengen in (X,d).

(b) Bestimmen Sie die kompakten Teilmengen $K \subset X$.

(c) Bestimmen Sie die beschränkten Teilmengen $B \subset X$.

(d) Sind die kompakten Teilmengen von X genau die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen?

(e) Ist (X,d) vollständig?

(f) Sind die beschränkten Teilmengen von (X,d) stets totalbeschränkt?

Aufgabe 2
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die abgeschlossenen Bälle

$$\overline{B(0,r)} = \{v \in V \mid \|v\| \leq r\}$$

zentralsymmetrisch und konvex sind.

Hinweis. Die Zentralsymmetrie bedeutet, dass mit v auch $-v$ Element der Menge ist. Die Konvexität bedeutet, dass mit x, y bereits die ganze Verbindungsstrecke $\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\}$ in der Menge enthalten ist.

Aufgabe 3
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass A (bzgl. der induzierten Metrik) genau dann vollständig ist, wenn A abgeschlossene Teilmenge von X ist.

Aufgabe 4
Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $K \subset X$ kompakt. Zeigen Sie, dass K abgeschlossene Teilmenge von X ist.