Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 7

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $S \subset X$ zusammenhängend. Zeigen Sie, dass dann jede Menge T mit $S \subset T \subset \overline{S}$ ebenfalls zusammenhängend ist. Folgern Sie daraus, dass die Teilmenge

$$\{(x, \sin(\tfrac{1}{x})) \mid x > 0\} \cup \{(0,0)\}$$

des $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend ist. Skizzieren Sie die Menge.

Aufgabe 2

Wir betrachten auf dem Vektorraum $C([0,1], \mathbb{R})$ die Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ und die 1-Norm, gegeben durch $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$. Zeigen Sie, dass diese Normen nicht äquivalent sind.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Tangentialvektoren und die Länge der *Zykloide* $f\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Gibt es singuläre Parameterwerte?

Hinweis. Es gilt bekanntlich $\sin^2(\frac{t}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos(t))$.

Aufgabe 4

Wir betrachten erneut die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) f ist stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (Berechnen Sie die partiellen Ableitungen in diesen Punkten).

(b) f ist total differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (Berechnen Sie die Jacobi-Matrix).

(c) f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(d) f ist nicht stetig.

(e) f ist partiell differenzierbar (Berechnen Sie die partiellen Ableitungen im Nullpunkt).

(f) f ist nicht total differenzierbar.

(g) f ist nicht stetig partiell differenzierbar.

(h) f ist, eingeschränkt auf vertikale oder horizontale Geraden, stetig. D.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $y \mapsto f(x,y)$ stetig und für alle $y \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $x \mapsto f(x,y)$ stetig.

(i) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(Was ändert sich, falls man die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(0,0) = 0$ und $g(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ betrachtet?)