Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 12

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + yz - y^2 + z^2 \,,$$

eingeschränkt auf die Einheitskugel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 2 (Gronwallsches Lemma)
Sei J ein Intervall und sei $t_0 \in J$. Sei $\gamma\colon J \to \mathbb{R}_+$ stetig mit

$$\gamma(t) \leq A + B\Big|\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\Big|$$

für alle $t \in J$, wobei $A, B \in \mathbb{R}_+$ Konstanten sind. Zeigen Sie, dass dann für alle $t \in J$ gilt

$$\gamma(t) \leq Ae^{B|t-t_0|} \,.$$

Hinweis. Betrachten Sie im Fall $t \geq t_0$ die Funktion $h\colon [t_0, t] \to \mathbb{R}_+$,

$$s \mapsto Be^{B(t_0-s)} \int_{t_0}^{s} \gamma(\tau)d\tau \,.$$

Zeigen Sie, dass gilt $h'(s) \leq \frac{d}{ds}(-Ae^{B(t_0-s)})$ und integrieren Sie anschliessend. Der Fall $t \leq t_0$ folgt analog durch Betrachtung von $h\colon [t, t_0] \to \mathbb{R}_-$,

$$s \mapsto -Be^{B(s-t_0)} \int_{s}^{t_0} \gamma(\tau)d\tau \,.$$

Aufgabe 3
Skizzieren Sie die zu den folgenden skalaren DGLen zugehörigen Richtungsfelder.

(a) $\dot{x} = \frac{t}{x}$, wobei $x \neq 0$.

(b) $\dot{x} = \frac{x}{t}$, wobei $t \neq 0$.

(c) $\dot{x} = -\frac{t}{x}$, wobei $x \neq 0$.

(d) $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$.