

Übungen zur Vorlesung  
**Analysis II**  
Blatt 11 (Weihnachtsblatt)

**Aufgabe 1 (Banachscher Fixpunktsatz)**

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und sei  $T: X \rightarrow X$  eine Kontraktion, d.h. es existiert eine Konstante  $0 \leq c < 1$ , sodass

$$d(T(x), T(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass für ein beliebiges  $x \in X$  gilt:

- (a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $d(T^{n+1}(x), T^n(x)) \leq c^n d(T(x), x)$ .
- (b) Für alle  $n \geq m$  gilt  $d(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{1}{1-c} d(T^{m+1}(x), T^m(x))$ .
- (c)  $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge und der Grenzwert  $\xi$  ist Fixpunkt von  $T$ .
- (d)  $T$  hat genau einen Fixpunkt.
- (e) Es gelten die Abschätzungen  $d(T^n(x), \xi) \leq \frac{1}{1-c} d(T^{n+1}(x), T^n(x)) \leq \frac{1}{1-c} c^n d(T(x), x)$ .

**(2+2+2+2+2 Punkte)**

**Aufgabe 2 (Kugelkoordinaten)**

Entscheiden Sie, in welchen Punkten die  $C^\infty$ -Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta),$$

eine lokale Inverse besitzt. Zeigen Sie, dass  $f$  surjektiv ist und bestimmen Sie, falls existent, explizit die lokalen inversen Abbildungen  $\psi$  von  $f$  in den Punkten  $(x, y, z)$  mit  $x, y, z > 0$ .

*Hinweis.* Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante.

**(6 Punkte)**

**Aufgabe 3**

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v &= 1 \end{aligned}$$

in der Nähe von  $(1/2, 0, 1/2, 0)$  eindeutig nach  $(u, v) = \varphi(x, y)$  aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie auch die Jacobi-Matrix  $J\varphi(x, y)$  von  $\varphi$  an der Stelle  $(x, y) = (1/2, 0)$ .

**(ohne Abgabe)**

**Aufgabe 4**

Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader größten Volumens, welcher der Ellipsoidfläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1\}$$

mit  $a, b, c > 0$  eingeschrieben ist.

**(ohne Abgabe)**

**Ich wünsche Ihnen frohe Weihnachten  
und ein gutes neues Jahr!**

**Abgabe bis Freitag, 12.01.2018, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im  
Kopierraum V3-128**