

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Blatt 11 (Weihnachtsblatt)

Aufgabe 1 (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $T: X \rightarrow X$ eine Kontraktion, d.h. es existiert eine Konstante $0 \leq c < 1$, sodass

$$d(T(x), T(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass für ein beliebiges $x \in X$ gilt:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(T^{n+1}(x), T^n(x)) \leq c^n d(T(x), x)$.
- (b) Für alle $n \geq m$ gilt $d(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{1}{1-c} d(T^{m+1}(x), T^m(x))$.
- (c) $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge und der Grenzwert ξ ist Fixpunkt von T .
- (d) T hat genau einen Fixpunkt.
- (e) Es gelten die Abschätzungen $d(T^n(x), \xi) \leq \frac{1}{1-c} d(T^{n+1}(x), T^n(x)) \leq \frac{1}{1-c} c^n d(T(x), x)$.

(2+2+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2 (Kugelkoordinaten)

Entscheiden Sie, in welchen Punkten die C^∞ -Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta),$$

eine lokale Inverse besitzt. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist und bestimmen Sie, falls existent, explizit die lokalen inversen Abbildungen ψ von f in den Punkten (x, y, z) mit $x, y, z > 0$.

Hinweis. Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante.

(6 Punkte)

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v &= 1 \end{aligned}$$

in der Nähe von $(1/2, 0, 1/2, 0)$ eindeutig nach $(u, v) = \varphi(x, y)$ aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie auch die Jacobi-Matrix $J\varphi(x, y)$ von φ an der Stelle $(x, y) = (1/2, 0)$.

(ohne Abgabe)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader größten Volumens, welcher der Ellipsoidfläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1\}$$

mit $a, b, c > 0$ eingeschrieben ist.

(ohne Abgabe)

**Ich wünsche Ihnen frohe Weihnachten
und ein gutes neues Jahr!**

**Abgabe bis Freitag, 12.01.2018, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im
Kopierraum V3-128**