Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1
Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $A^m = \mathbb{1}_n$.

(a) Zeigen Sie, dass χ_A nur m-te Einheitswurzeln als Nullstellen hat.

(b) Zeigen Sie, dass die Spur von A eine Summe von m-ten Einheitswurzeln ist.

Hinweis. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *m-te Einheitswurzel*, falls gilt $z^m = 1$.

Aufgabe 2
Sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen und sei $A \in GL_n(K)$ mit $\chi_A = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\chi_{A^{-1}} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \det(A)^{-1} a_i X^{n-i}\,.$$

Hinweis. Es genügt zu zeigen, dass $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \sum_{i=0}^n (-1)^n \det(A)^{-1} a_i \lambda^{n-i}$ für unendlich viele $\lambda \in K$ gilt (Warum?).

Aufgabe 3
Trigonalisieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.