Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei M Teilmenge von V und F Teilmenge von V^t. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) M° ist ein Teilraum von V^t.

(b) F° ist ein Teilraum von V.

Aufgabe 2
Sei U ein Teilraum eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die Transponierte ι^t der Inklusionsabbildung $\iota : U \hookrightarrow V$, $u \mapsto u$, jeder Linearform $f : V \to K$ seine Einschränkung $f_U : U \to K$ auf U zuordnet. Selbstverständlich ist ι^t surjektiv (Warum?). Zeigen Sie damit erneut, dass gilt

$$\dim U^\circ = \dim V - \dim U\,.$$

Aufgabe 3
Sei R ein *Integritätsring*, d.h. ein kommutativer nullteilerfreier Ring mit Eins, wobei $1 \neq 0$. Die Nullteilerfreiheit bedeutet, dass aus $r \cdot s = 0$ stets $r = 0$ oder $s = 0$ folgt. Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist R zusätzlich eine endlich-dimensionale K-Algebra für einen Körper K, so ist R ein Körper.

Hinweis. Hier ist nur zu zeigen, dass jedes Ringelement $r \neq 0$ ein multiplikatives Inverses besitzt. Betrachten Sie die Abbildung $m_r : R \to R$, die durch Multiplikation mit r gegeben ist, also $s \mapsto r \cdot s$.

Aufgabe 4
Sei $A \in M_n(\mathbb{Q})$ eine *schiefsymmetrische* Matrix, d.h.

$$A^t = -A\,.$$

Zeigen Sie, dass gilt: Ist n ungerade, so gilt $\det A = 0$.

Hinweis. Welche Eigenschaft der rationalen Zahlen wird im Beweis benutzt?