Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1
Beweisen Sie die folgenden Teilbarkeitsregeln in $K[X]$:

(a) $f \mid f$.

(b) $(f \mid g \ \wedge \ g \mid h \implies f \mid h)$.

(c) Für $c \in K \setminus \{0\}$ gilt stets $c \mid f$.

(d) $f_1 \mid f_2 \ \wedge \ g_1 \mid g_2 \implies f_1 g_1 \mid f_2 g_2$.

(e) $f \mid g \ \wedge \ f \mid h \implies f \mid g + h$.

(f) Für $h \neq 0$ gilt stets $(fh \mid gh \implies f = g)$.

Aufgabe 2
Seien $I, J \subset K[X]$ Ideale. Zeigen Sie, dass auch $I \cap J$ und

$$I + J := \{x + y \mid x \in I \text{ und } y \in J\}$$

Ideale sind.

Aufgabe 3
Seien $f_1, \ldots, f_n \in K[X]$. Zeigen Sie, dass jedes $m \in K[X]$ mit

$$(f_1) \cap \cdots \cap (f_n) = (m)$$

ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (*kgV*) der $f_1, \ldots, f_n$ ist. Zeigen Sie, dass *kgV*'s bis auf Multiplikation mit Konstanten $\neq 0$ eindeutig bestimmt sind.

Hinweis. Kleinste gemeinsame Vielfache werden analog zu *ggT*'s definiert (also gemeinsame Vielfache m, sodass jedes weitere gemeinsame Vielfache auch Vielfaches von m ist).

Aufgabe 4
Geben Sie zwei verschiedene Matrizen $A \in M_5(\mathbb{R})$ an, deren charakteristische Polynome beide gegeben sind durch

$$-(X-2)^3(X-1)^2 \, .$$

Verifizieren Sie anschließend explizit die Zerlegung von $\mathbb{R}^5$ als direkte Summe der zugehörigen verallgemeinerten Eigenräume.