Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2018/2019

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 1
Sei K ein Körper, sei $\alpha \in K$ und sei

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} \in M_m(K)$$

ein Jordankästchen zum Eigenwert α der Größe $m \geq 1$. Bestimmen Sie eine Formel für die $n$te Potenz $(J_\alpha)^n$ von J_α $(n \in \mathbb{N})$ und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe 2
Verwenden Sie Ihre Formel aus Aufgabe 1, um eine explizite Formel für die $n$te Potenz einer *beliebigen* Matrix $A \in M_k(\mathbb{C})$ zu bestimmen. Zeigen Sie als Konsequenz, dass für rekursiven Folgen der Ordnung $k \geq 1$ (siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 0) stets explizite Formeln der Form

$$a_n \;=\; \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} \binom{n}{j} z_{ij} \alpha_i^{n-j},$$

mit geeigneten $z_{ij \in \mathbb{C}}$ existieren, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte der Matrix M mit algebraischen Vielfachheiten m_i sind. Die z_{ij} erhält man aus den Anfangswerten $a_0, \ldots, a_{k-1}$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass eine Bilinearform $\beta : V \times V \to K$ auf einem K-Vektorraum V im Fall $\mathrm{char}(K) \neq 2$ genau dann symplektisch ist, wenn sie schiefsymmetrisch ist.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass für jede Matrix $C \in M_n(K)$ durch

$$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij} x_i x_j$$

eine quadratische Form auf K^n gegeben ist. Läßt sich q auch durch eine symmetrische Matrix $C' \in M_n(K)$ im Sinne obiger Gleichung darstellen?