Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 11

Wie in der Vorlesung sei stets $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Aufgabe 1
Sei (V, q) ein nicht-ausgearteter n-dimensionaler quadratischer Raum und sei U ein Teilraum von V. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Einschränkung $\beta_{|U}$ von β auf U ist nicht-ausgeartet.

(ii) $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

(iii) Die Einschränkung $\beta_{|U^{\perp}}$ von β auf $U^{\perp}$ ist nicht-ausgeartet.

(iv) $U + U^{\perp} = V$.

(v) $U \oplus U^{\perp} = V$.

(vi) Jede Orthogonalbasis von $(U, q_{|U})$ läßt sich zu einer Orthogonalbasis von (V, q) fortsetzen.

Hinweis. Nach Übung 1 auf Blatt 10 ist hier nur noch die Äquivalenz von (i)-(v) mit (vi) zu zeigen.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass für Elemente $a_1, \ldots, a_n$ und $c_1, \ldots, c_n \neq 0$ eines Körpers K stets gilt

$$[a_1, \ldots, a_n] \;\simeq\; [c_1^2 a_1, \ldots, c_n^2 a_n]\,.$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie direkt, dass die Diagonalform $[1, -1]$ für jeden Körper K alle Elemente von K darstellt.

Aufgabe 4
Zeigen Sie direkt, dass die von der symmetrischen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

induzierte quadratische Form q_A für jeden Körper K äquivalent zu der Diagonalform $[1, -1]$ ist.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass sich jede symmetrische Matrix $A \in M_n(K)$ durch sukzessive *symmetrische elementare Umformungen*, also jeweils Multiplikation von rechts mit einer Elementarmatrix S und Multiplikation von links mit der Transponierten S^t in Diagonalform bringen läßt. Wenden Sie das Verfahren auf die quadratischen Formen von Aufgabe 3 auf Blatt 10 an.