Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim V = n \geq 1$ und seien $f_1, \ldots, f_m \in \operatorname{End}(V)$ mit

$$f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$$

für alle $i \neq j$. Zeigen Sie, dass die $f_1, \ldots, f_m$ einen *simultanen Eigenvektor* besitzen, d.h. es existiert ein $v \neq 0$ und es existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ mit

$$f_i(x) = \lambda_i\, x$$

für alle $i = 1, \ldots, m$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Die Linearformen $f_1, f_2, f_3 \in (\mathbb{R}^3)^t$ seien definiert durch $f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 + 2x_3$ und $f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3$.

(a) Zeigen Sie, dass die f_1, f_2, f_3 eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^t$ bilden.

(b) Zu welcher Basis des $\mathbb{R}^3$ ist $\{f_1, f_2, f_3\}$ die duale Basis?

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f_1, \ldots, f_r \in V^t$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Kern} f_i \right) \;\geq\; n - r$$

und es gilt Gleichheit genau dann, wenn die $f_1, \ldots, f_r$ linear unabhängig sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 4
Bestimmen Sie den *ggT* der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$.

(a) $X - 1$ und $2X + 4$.

(b) $(X-2)^2(X+3)^2$ und $(X-1)(X-2)^2(X+3)$.

(c) X^3-3X+2 und X^3-5X^2+8X-4.

(d) X^4-X^2-2 und X^4-4.

(1+1+2+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 08.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128