Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit $n \geq 1$ und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom χ_f von f genau dann irreduzibel ist, wenn $\{0\}$ und V die einzigen f-invarianten Teilräume von V sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus von V. Der Vektorraum V sei f-zyklisch. Zeigen Sie, dass dann jeder Endomorphismus $g \in \mathrm{End}(V)$, der mit f *kommutiert* (d.h. $f \circ g = g \circ f$), von der Form

$$g = a_0 f^0 + a_1 f^1 + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$$

mit gewissen $a_i \in K$ ist.

Hinweis. Da V f-zyklisch ist, gibt es eine Basis von V der Form $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ mit geeignetem $v \in V$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Bestimmen Sie (falls möglich) die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen und geben Sie jeweils eine Jordanbasis und das Minimalpolynom an:

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Q}) .$$

(c)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{C}) .$$

(4+4+4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 29.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128