Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Blatt 9

Aufgabe 1
Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit $\dim V = \dim W$ und sei $\beta\colon V \times W \to K$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform. Seien weiter $s \in \mathrm{End}(V)$ und $t \in \mathrm{End}(W)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Das Paar (s,t) *läßt* β *invariant*, d.h. es gilt $\beta(s(v), t(w)) = \beta(v,w)$ für alle $v \in V$ und alle $w \in W$.

(ii) Es gilt ${}^*t \circ s = id_V$.

(iii) s und t sind invertierbar und es gilt $s^{-1} = {}^*t$ und $t^{-1} = s^*$.

(iv) Gehören bei fester Basiswahl B von V bzw. C von W zu s bzw. t die Koordinatenmatrizen S bzw. T und zu β die Strukturmatrix M, so gilt

$$M = S^t M T\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeigen Sie, dass es einen Teilraum W von V gibt, sodass $V = V^\perp \oplus W$ und $V^\perp \perp W$ gilt, d.h. $\beta(x,y) = 0$ für alle $x \in V^\perp$ und $y \in W$. (Man sagt dann, dass V die *orthogonale Summe* von $V^\perp$ und W ist.) Zeigen Sie weiter, dass dann die Einschränkung $\beta_{|W}\colon W \times W \to K$ von β auf W nicht-ausgeartet ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 3
(a) Konstruieren Sie eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ mit ${}^\perp(\mathbb{R}^2) = \langle (1,0)^t \rangle$ und $(\mathbb{R}^2)^\perp = \langle (0,1)^t \rangle$.

(b) Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ der reellen Folgen, deren Folgenglieder fast alle gleich 0 sind, sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\beta(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_{n+1}\,,$$

wobei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass β eine Bilinearform auf V ist und berechnen Sie die Dimensionen $\dim {}^\perp V$ und $\dim V^\perp$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei β eine Bilinearform auf V mit Strukturmatrix M bezüglich einer Basis B von V. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\dim {}^{\perp}V = n - \operatorname{Rang} M = \dim V^{\perp}$.

(b) β ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn eine (und damit jede) Strukturmatrix von β invertierbar ist.

(3+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 13.12.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128