Peter Zeiner

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Bielefeld, 20. Juli 2009

Mathematik für Biologen, Biotechnologen und Biochemiker

Sommersemester 2009

FAQ zur Stetigkeit

Wie kann ich beweisen, dass eine Funktion stetig ist?
Eine Möglichkeit besteht darin, die Definition direkt anzuwenden. Das ist aber meist umständlich. Stattdessen können wir auch die Fakten und Regeln verwenden, die wir in der Vorlesung kennengelernt haben.

(1) In der Vorlesung haben wir etliche stetige Funktionen kennengelernt, u.a. sind die folgenden Funktionen stetig: konstante Funktionen, Potenzfunktionen, Polynome, Winkelfunktionen (Sinus- und Cosinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$, Tangens und Cotangens auf gewissen Intervallen (welche?)), Exponentialfunktion, Logarithmus, …

(2) Des Weiteren haben wir verschiedene Regeln für das Zusammensetzen von Funktionen kennengelernt. So sind die Summe und das Produkt zweier stetiger Funktionen ebenfalls stetige Funktionen, analoges gilt für die Komposition zweier stetiger Funktionen. Beim Quotienten $\frac{f}{g}$ zweier stetiger Funktionen ist darauf zu achten, dass $g(x) \neq 0$ gelten muss, da die Funktion andernfalls an dieser Stelle x nicht definiert, und daher nicht stetig ist.

(3) Außerdem ist die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion stetig.

Beispiel: Begründen Sie, warum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\frac{1-x+x^2}{1+x^4}\right)$ stetig ist.
Eine mögliche Begründung: Die beiden Polynome $P(x) := 1 - x + x^2$ und $Q(x) := 1 + x^4$ sind laut Vorlesung stetig. Da $1 + x^4 \geq 1 > 0$ gilt, gilt $Q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, daher ist auch der Quotient $g := \frac{P}{Q}$ eine stetige Funktion. Da die Sinusfunktion stetig ist und die Komposition zweier stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist, ist also auch $f(x) = \sin(g(x))$ stetig.

Wie finde ich die Unstetigkeitsstellen einer Funktion?
Meistens (insbesondere bei der Klausur) reicht es, eine ordentliche Skizze von der Funktion zu zeichnen. Die Unstetigkeitsstellen kann man dann leicht anhand des Graphen bestimmen.

Wie beweise ich, dass eine Funktion f an einer Stelle $x = x_0$ unstetig ist?
Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten (kein Anspruch auf Vollständigkeit):

(1) Konstruiere eine gegen x_0 konvergente Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ so, dass die Folge $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert.

(2) Finde zwei gegen x_0 konvergente Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ so, dass $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ gegen einen anderen Grenzwert konvergiert als $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$. — Dieses Verfahren wurde in der Übungsaufgabe 39 verwendet.

(3) Zeige, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert verschieden sind (siehe Übungsaufgabe 38).

(4) Zeige, dass in jedem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ein x existiert mit der Eigenschaft, dass $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ für ein geeignet gewähltes, von δ unabhängiges ε.

Bei der Klausur ist ein formaler Beweis nicht notwendig. Eine klare Skizze, aus der hervorgeht, wo die Funktion unstetig ist, zusammen mit einer kurzen verbalen Bemerkung (z.B. „die Funktion besitzt eine Sprungstelle bei $x = 1$, einen Pol bei $x = 2$“) ist ausreichend.