Peter Zeiner

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Bielefeld, 15. Juli 2009

Mathematik für Biologen, Biotechnologen und Biochemiker

Sommersemester 2009

Aufgaben zur Klausurvorbereitung — Teil 2

(9) Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass gilt:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$.

(10) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2-1}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a^k$ für $-1 < a < 1$. *Hinweis: Wie kann man diese Summe ausrechnen?*

(c) $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n})$.

(11) Wir betrachten wieder einmal eine unsterbliche Kaninchenart. Auch bei dieser Art wird ein neugeborenes Kaninchenpaar im zweiten Monat geschlechtsreif und zeugt in diesem Monat auch seine ersten Nachkommen. Diesmal zeugt aber jedes Kaninchenpaar pro Monat zwei Kaninchenpaare, die am Beginn des folgenden Monats geboren werden. Im ersten Monat sei ein neugeborenes Kaninchenpaar vorhanden, das also im 2. Monat geschlechtsreif wird, sodass im 3. Monat neben dem ersten Elternpaar noch zwei neugeborene Kaninchenpaare vorhanden sind. Wenn a_n die Zahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat angibt, gilt also $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 3$.

(a) Geben Sie eine (rekursive) Formel an, mit der man die Zahl a_{n+2} der Kaninchenpaare im Monat $n + 2$ aus der Zahl der Kaninchenpaare der Vormonate berechnen kann.

(b) Geben Sie die Zahl der Kaninchenpaare im 4. und 5. Monat an.

(c) Ein Biologe hat nach langem Herumprobieren herausgefunden, dass die Zahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat durch $a_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$ gegeben zu sein scheint, er ist sich dessen aber nicht sicher. Kontrollieren Sie, ob diese Formel tatsächlich stimmt: Rechnen Sie dazu erst nach, ob diese Formel die richtigen Werte für a_1 und a_2 liefert und überprüfen Sie dann, ob auch die Rekursionsformel aus Punkt (a) erfüllt ist.

Bitte wenden!

(d) Jedes Kaninchenpaar frisst pro Monat ein Kilo Karotten. Wie viele Kilo Karotten werden im n-ten Monat gefressen, wie viele Kilo wurden bis dahin (einschließlich des n-ten Monats) insgesamt gefressen? *Hinweis: Verwenden Sie dazu die Formel aus (c).*

(12) (a) Was ist eine stetige Funktion? Geben Sie die Definition an.

(b) Begründen Sie, warum die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}$$

stetig ist.

(c) Skizzieren Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ 2 + x^2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Lesen Sie aus dem Graphen ab, an welchen Stellen die Funktion unstetig ist. Ist die Funktion in einem Intervall streng monoton wachsend oder fallend?

(13) Im Jahr 0 leben in einem Wald 1000 Braunbären und 100 Schwarzbären. Die Zahl der Braunbären verdopple sich in zehn Jahren, die der Schwarzbären verdreifache sich im gleichen Zeitraum.

(a) Geben Sie die Zahl $B(t)$ der Braunbären und die Zahl $S(t)$ der Schwarzbären als Funktion der Zeit t(in Jahren) an.

(b) Wann hat sich die Zahl der Schwarzbären verdoppelt? *Hinweis: Sie können im Ergebnis einfache Logarithmen stehen lassen. Oder Sie suchen sich passende Zahlenwerte aus:* $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} \approx 0.63$, $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2} \approx 1.58$, $\frac{\ln 20}{\ln 3} = \log_3 20 = \frac{1}{\log_{20} 3} \approx 2.73$, $\frac{\ln 3}{\ln 20} = \log_{20} 3 = \frac{1}{\log_3 20} \approx 0.37$

(c) Wann gibt es gleich viele Braunbären und Schwarzbären? *Hinweis:* $\frac{\ln 10}{\ln 3 - \ln 2} \approx 5.68$, $\frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 10} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 5 + \ln 2} \approx 0.177$, $\frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0.68$, $\frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1.46$, $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

(14) Berechnen Sie ohne Taschenrechner: $\log_7 49$, $\log_2 16$, $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(15) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \sin(x^2)$

(b) $f(x) = x^\alpha e^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

(d) $f(x) = 10 + 2\sin(x-1)$.

(16) Bestimmen Sie Maxima, Minima und Wendepunkte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(17) (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int e^{ax}dx$ für $a \neq 0$.

(b) Eine Population von Mikroben wachse für $t \geq 0$ mit der Geschwindigkeit $m'(t) = 10te^{2t}$, wobei t die Zeit in Tagen sei. Wenn die Zahl der Mikroben zum Zeitpunkt $t = 0$ durch $m(0) = 10$ gegeben ist, wie viele Mikroben gibt es nach genau drei Tagen? *Hinweis: Die Funktion $m'(t)$ ist ein Produkt, in Aufgabe (a) wurde bereits eine Stammfunktion für e^{2t} gefunden. Verwenden Sie die Näherung $e^6 \approx 400$.*

Erinnerung: Von Übungsblatt 10 ist die Aufgabe 36 klausurrelevant, von Übungsblatt 11 sind die Aufgaben 42a,b und 43a sowie die Aufgabe 44 klausurrelevant.
Hinweis: Arithmetische und geometrische Folgen und die entsprechenden Reihen sollte man perfekt beherrschen.