
Mathematik für Biologen, Biotechnologen und Biochemiker

Sommersemester 2009

Übungsblatt 10

(36) Wo sind die folgenden Funktionen stetig, wo unstetig?

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1}}$

(e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

(5 Infopunkte)

(37) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Der rechtsseitige Limes $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ ist definiert als

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n),$$

falls die rechte Seite für jede gegen x_0 konvergente Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n > x_0 \forall n \in \mathbb{N}$ den gleichen Wert annimmt. Analog ist der linksseitige Limes $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ definiert, wobei man hier Folgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n < x_0 \forall n \in \mathbb{N}$ betrachtet.

(a) Berechnen Sie den linksseitigen und den rechtsseitigen Limes von

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$.

(b) Welchen Wert besitzen der rechtsseitige und der linksseitige Limes für eine stetige Funktion?

(2 Infopunkte)

Bitte wenden!

- (38) Seien f und g unstetige Funktionen. Sind dann auch f^2 und fg unstetig? Begründen Sie Ihre Behauptung!

(2 Infopunkte)

- (39) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass f bei $x = 0$ unstetig ist. *Hinweis: Lösen Sie erst den folgenden Punkt.*

(b) Betrachten Sie die Folgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n = \frac{1}{a+2\pi n}$ für beliebige $a \in [-\pi, \pi]$. Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

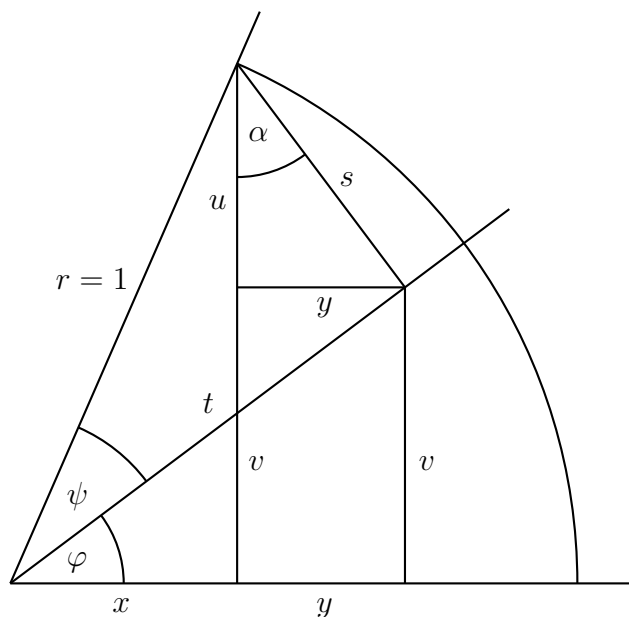
(2 Infopunkte)

- (40) (a) Zeigen Sie mit Hilfe des folgenden Diagramms, dass

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi \quad (1)$$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \psi \sin \varphi \quad (2)$$

gilt. *Hinweis: Bestimmen Sie zunächst s, t und α und danach $u, v, u + v$ sowie $x, y, x + y$.*



- (b) Verwenden Sie (1) und (2), um $\cos^2 \varphi$ und $\sin^2 \varphi$ durch $\sin(2\varphi)$ und $\cos(2\varphi)$ auszudrücken („Formeln für den halben Winkel“). Bestimmen Sie damit $\cos \frac{\pi}{8}$ und $\sin \frac{\pi}{8}$. *Hinweis: $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.*

(2+2 Infopunkte)

Abgabe bis zum 23.6.2009, 12.00 Uhr