
Mathematik für Biologen, Biotechnologen und Biochemiker

Sommersemester 2009

Übungsblatt 2

(3) Gegeben seien die 2×2 -Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie XY und YX . Was fällt Ihnen auf?
(b) Berechnen Sie I^2 , I^3 und I^4 .
(c) Sei $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass X^{-1} durch

$$X^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

- (d) Berechnen Sie $(XY)^{-1}$.
Hinweis: Verwenden Sie Punkt (c).

(2+2+1+1 Infopunkte)

(4) Gegeben seien die 3×3 -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB und BA . Was fällt Ihnen auf?

(2 Infopunkte)

- (5) Wir betrachten eine gefährdete Eulenpopulation. Im Frühling 2009 sei die Zahl der neu geschlüpften weiblichen Eulen $x_0(2009) = 6000$, die Zahl der ein Jahr alten Weibchen $x_1(2009) = 1000$ und die Zahl der erwachsenen Weibchen (2 Jahre oder älter) $x_2(2009) = 2500$. Wir nehmen an, dass $1/6$ der frisch geschlüpften Eulen das erste Jahr überlebt, von den einjährigen überleben $3/5$ und von den erwachsenen $4/5$. Jedes erwachsene Weibchen brütet jedes Jahr zwei weibliche Junge aus.

Bitte wenden!

- (a) Wie viele Eulen jeder der 3 Altersklassen gibt es 2010, 2011 und 2012?
- (b) Geben Sie eine Formel an, mit deren Hilfe man die Eulenpopulation eines Jahres aus der Eulenpopulation des Vorjahres berechnen kann.
Hinweis 1: Gesucht ist eine Formel der Form $x(n+1) = Ax(n)$, wobei $x(n)$ die Eulenpopulation des Jahres n angibt und A eine zu bestimmende Matrix ist.
Hinweis 2: Sie dürfen die Punkte (b) und (c) auch vor Punkt (a) lösen.
- (c) Geben Sie eine Formel an, mit der man die Eulenpopulation des Jahres $n+m$ aus jener des Jahres n berechnen kann.
- (d) Nehmen Sie an, die Eulenpopulation eines Jahres sei durch $(x_0, x_1, x_2) = (90000, 15000, 45000)$ gegeben. Berechnen Sie die Eulenpopulationen der folgenden fünf Jahre. Was fällt auf?

(3+1+1+1 Infopunkte)

- (6) Seien A und B zwei $k \times m$ -Matrizen und C eine $m \times n$ -Matrix. Beweisen Sie, dass $(A+B)C = AC + BC$ gilt.

(2 Infopunkte)

Abgabe bis zum 28.4.2009, 12.00 Uhr